

Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 4 de sobrantes de 2006.

(a) [1'5 puntos] Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = ax^2 + b$. Halla los valores de a y b sabiendo

$\int_0^6 f(x)dx = 6$ y que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto de abscisa 3 vale -12 .

(b) [1 punto] Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2 + px + q$. Calcula los valores de p y q sabiendo que la función f tiene un extremo en $x = -6$ y su valor en él es -2 .

Solución

(a)

$$f(x) = ax^2 + b; \int_0^6 f(x)dx = 6$$

Si la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa 3 vale -12 , sabemos que $f'(3) = -12$

$$f'(x) = 2ax;$$

$$f'(3) = -12; -12 = 6a, \text{ de donde } a = -2 \text{ por tanto } f(x) = -2x^2 + b$$

$$\int_0^6 f(x)dx = 6 = \int_0^6 (-2x^2 + b)dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + bx \right]_0^6 = -2(6^3)/3 + 6b$$

Resolviendo $-2(6^3)/3 + 6b = 6$, obtenemos $b = 25$ y la función pedida es $f(x) = -2x^2 + 25$

(b)

$$f(x) = x^2 + px + q.$$

Extremo en $x = -6$ nos dice que $f'(-6) = 0$

Su valor es -2 nos dice que $f(-6) = -2$

$$f'(x) = 2x + p.$$

De $f'(-6) = 0$ tenemos $0 = -12 + p$, de donde $p = 12$. La función es $f(x) = x^2 + 12x + q$

De $f(-6) = -2$ tenemos $-2 = 36 - 72 + q$, de donde $q = 34$

La función pedida es $f(x) = x^2 + 12x + 34$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 4 de sobrantes de 2006.

[2'5 puntos] Calcula $\int (x^2 - 1)e^{-x} dx$

Solución

$I = \int (x^2 - 1)e^{-x} dx$ es una integral por partes. Aplicaremos $\int u dv = uv - \int v du$, siendo u y v funciones con derivada continua.

$$u = x^2 - 1, \text{ de donde } du = 2x dx; \quad dv = e^{-x} dx, \text{ de donde } v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

$$I = \int (x^2 - 1)e^{-x} dx = (-e^{-x})(x^2 - 1) - \int -2xe^{-x} dx = (-e^{-x})(x^2 - 1) + 2 \int xe^{-x} dx = (-e^{-x})(x^2 - 1) + 2 I_1$$

$$I_1 = \int xe^{-x} dx; \quad u = x, \text{ de donde } du = dx; \quad dv = e^{-x} dx, \text{ de donde } v = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

$$I_1 = \int xe^{-x} dx = x(-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx = x(e^{-x}) - e^{-x}$$

$$\text{Por tanto } I = \int (x^2 - 1)e^{-x} dx = (-e^{-x})(x^2 - 1) + 2 I_1 = (-e^{-x})(x^2 - 1) + 2 [x(e^{-x}) - e^{-x}] = (-e^{-x})(x^2 + 2x + 1) + K$$

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 4 de sobrantes de 2006.

$$\text{Sea } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) [1 punto] Determina los valores de $m \in \mathfrak{R}$ para los que la matriz A tiene inversa.

(b) [1'5 puntos] Para $m = 0$ y siendo $X = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}$, resuelve $X \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Existe A^{-1} si y solo si $\det(A) = |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & m-3 & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \stackrel{1^a C + 3^a C}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & m & 3 \\ m+1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(6 - m^2 - m) = 0$$

Las soluciones de $6 - m^2 - m = 0$ son $m = 2$ y $m = -3$.

Para $m \neq 2$ y $m \neq -3$ existe A^{-1}

(b)

Para $m = 0$, la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y tiene matriz inversa A^{-1}

$XA = (3 \ 1 \ 1)$. Multiplicando por la derecha por A^{-1} tenemos $X = (3 \ 1 \ 1)A^{-1}$

$$A^{-1} = (1/|A|)\text{Adj}(A^t)$$

$$|A| = (-1)(6 - 0 - 0) = -6; \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } A^{-1} = (1/|A|)\text{Adj}(A^t) = \left(\frac{1}{-6}\right) \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por tanto } X = (3 \ 1 \ 1)A^{-1} = X = (3 \ 1 \ 1) \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} = (-1/6)(-12 \ -6 \ -6) = (2 \ 1 \ 1)$$

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 4 de sobrantes de 2006.

Sea r la recta de ecuación $(x-5)/2 = (y+2)/(-1) = z/4$ y s la recta dada por $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$

(a) [1'5 puntos] Determina la posición relativa de ambas rectas.

(b) [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s .

Solución

(a)

De la recta r $(x-5)/2 = (y+2)/(-1) = z/4$ tomamos un punto $A(5, -2, 0)$ y un vector director $\mathbf{u} = (2, -1, 4)$

De la recta s $\begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$ tomamos un punto B y un vector director \mathbf{v}

Para el punto hacemos $z = 0$ y nos queda el sistema

$$3x - 2y = 2$$

$$-x + 2y = 2, \text{ que al resolverlo nos da } x = 2 \text{ e } y = 2, \text{ por tanto el punto es } B(x,y,z) = B(2, 2, 0)$$

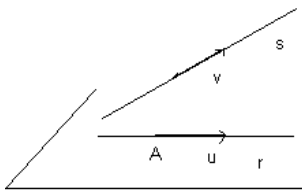
$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(6-2) - \mathbf{j}(-9+1) + \mathbf{k}(6-2) = (4, 8, 4)$$

Como los vectores \mathbf{u} y \mathbf{v} no son proporcionales las rectas se cortan o se cruzan. Para ver en que caso estamos tenemos que ver si es 0 o no el determinante $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$

$$\mathbf{AB} = (-3, 4, 0)$$

$$\det(\mathbf{AB}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 140 \neq 0, \text{ por tanto las rectas se cruzan}$$

(b)



Como el plano contiene a la recta r un punto del plano es A y un vector del plano es \mathbf{u} . Como el plano es paralelo a la recta s el otro vector paralelo del plano es el \mathbf{v} .

$$\pi \equiv \det(\mathbf{AX}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} x-5 & y+2 & z \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 8 & 4 \end{vmatrix} = (x-5)(-4-32) - (y+2)(8-16) + z(16+4) = -36x + 8y + 20z + 196 = 0$$

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 4 de sobrantes de 2006.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x^2 - x + 1)/(x^2 + x + 1)$

- (a) [0'75 puntos] Estudia si existen y calcula, cuando sea posible, las asíntotas de la gráfica de f .
 (b) [1'25 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos y los valores que alcanza en ellos la función f .
 (c) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de f .

Solución

(a)

$$f(x) = (x^2 - x + 1)/(x^2 + x + 1)$$

Como $x^2 + x + 1 = 0$ no tiene soluciones reales la función $f(x)$ no tiene asíntotas verticales.

Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$, la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal (A.H.) en ∞ y en $-\infty$.

Como $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1) = 0^-$, $f(x)$ está por debajo de la A.H. $y = 1$ en $+\infty$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 1) = 0^+$, $f(x)$ está por encima de la A.H. $y = 1$ en $-\infty$

(b)

Estudio de $f'(x)$

$$f(x) = (x^2 - x + 1)/(x^2 + x + 1); \quad f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+x+1) - (x^2-x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-2+2x^2}{(x^2+x+1)^2}$$

$f'(x) = 0$, nos da $-2 + 2x^2 = 0$, de donde $x = 1$ y $x = -1$, que serán los posibles extremos relativos

Si $x < -1$, $f'(-2) = (+)/(+) > 0$, $f'(x) > 0$ y por tanto $f(x)$ crece en $x < -1$

Si $-1 < x < 1$, $f'(0) = (-2)/(+) < 0$, $f'(x) < 0$ y por tanto $f(x)$ decrece en $-1 < x < 1$

Si $x > 1$, $f'(2) = (+)/(+) > 0$, $f'(x) > 0$ y por tanto $f(x)$ crece en $x > 1$

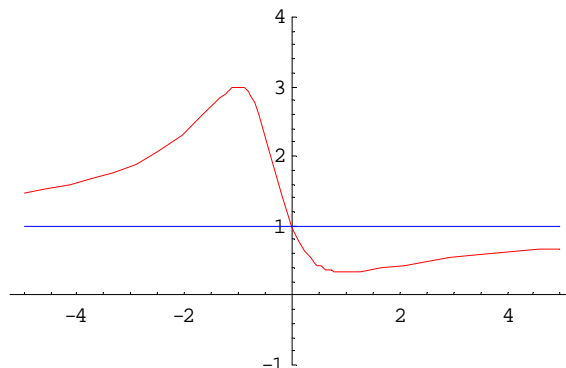
Por definición $x = -1$ es un máximo relativo que vale $f(-1) = 3$

Por definición $x = 1$ es un mínimo relativo que vale $f(1) = 1/3$

Además $f(0) = 1$

(c)

Un esbozo de la gráfica es



Ejercicio 2 de la opción B del modelo 4 de sobrantes de 2006.

[2'5 puntos] Halla el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \sin x$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = \pi$.

Solución

La recta tangente en $x = 0$ es $y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$$f(x) = \sin x ; f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x ; f'(0) = 1$$

La recta tangente en $x = 0$ es $y = x$, que es la bisectriz del I y III cuadrante

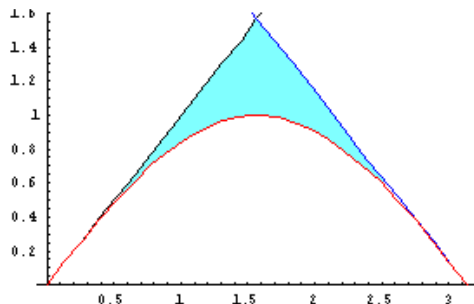
La recta tangente en $x = \pi$ es $y - f(\pi) = f'(\pi)(x-\pi)$

$$f(x) = \sin x ; f(\pi) = 0$$

$$f'(x) = \cos x ; f'(\pi) = -1$$

La recta tangente en $x = \pi$ es $y = -x + \pi$, que es la bisectriz del II y IV cuadrante, pero desplazada π unidades hacia arriba en el eje OY

Un esbozo de la gráfica es



Para determinar el área tenemos que ver donde se cortan las rectas es decir la solución de $x = -x + \pi$, que evidentemente es el punto $x = \pi/2$.

$$\begin{aligned} \text{El área pedida es } & \int_0^{\pi/2} (x - \sin x) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-x + \pi - \sin x) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \cos x \right]_0^{\pi/2} + \left[-\frac{x^2}{2} + \pi x + \cos x \right]_{\pi/2}^{\pi} = \\ & = (\pi^2/8 + \cos(\pi/2)) - (0 + \cos(0)) + (-\pi^2/2 + \pi^2 + \cos(\pi)) - (-\pi^2/8 + \pi^2/2 + \cos(\pi/2)) = \pi^2/4 - 2 \end{aligned}$$

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 4 de sobrantes de 2006.

Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y sea I la matriz identidad de orden dos.

(a) [1'25 puntos] Calcula los valores $\lambda \in \mathfrak{R}$ tales que $|A - \lambda I| = 0$.

(b) [1'25 puntos] Calcula $A^2 - 7A + 10I$.

Solución

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(3-\lambda) - 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 10$$

Resolviendo $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$, obtenemos $\lambda = 2$ y $\lambda = 5$

(b)

$$A^2 - 7A + 10I$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - 7A + 10I = \begin{pmatrix} 18 & 14 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 & 14 \\ 7 & 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_2, \text{ la matriz nula de orden 2.}$$

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 4 de sobrantes de 2006.

Considera la recta r de ecuaciones
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

(a) [1'25 puntos] Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y no corta al eje OZ .

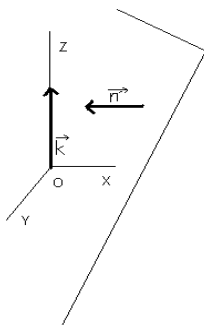
(b) [1'25 puntos] Calcula la proyección ortogonal del punto $A(1, 2, 1)$ sobre la recta r .

Solución

(a)

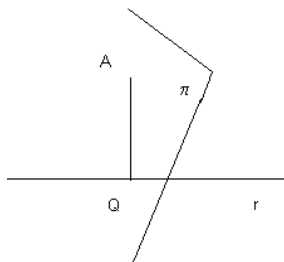
Formamos el haz de plano de terminado por la recta $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$ que es $(x+y+z-1) + m(x-2y+3z) = 0$

Ordenándolo $(1+m)x + (1-2m)y + (1+3m)z + (-1) = 0$. Un vector normal genérico sería $\mathbf{n}' = (1+m, 1-2m, 1+3m)$. Como el plano pedido no puede cortar al eje OZ el vector normal del plano \mathbf{n}' y el director del eje $\mathbf{k} = (0,0,1)$ han de ser perpendiculares, es decir su producto escalar ha de ser cero, es decir $\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}' = 0$



$\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}' = 0 = 1 + 3m = 0$, de $m = -1/3$ y el plano pedido es $(x+y+z-1) + (-1/3)(x-2y+3z) = 0$

(b)



Calculamos el plano π que pasa por $A(1, 2, 1)$ y es perpendicular a r . Su vector normal \mathbf{n} será el director de r , \mathbf{u}

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(5) - \mathbf{j}(2) + \mathbf{k}(-3) = (5, -2, -3).$$

El plano π es $5(x-1) - 2(y-2) - 3(z-1) = 5x - 2y - 3z + 2 = 0$

El punto Q proyección ortogonal del punto A sobre la recta r es la intersección de la recta r con el plano π

Ponemos la recta $r \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-2y+3z=0 \end{cases}$ en vectorial. Ya hemos visto que un vector director es $\mathbf{u} = (5, -2, -3)$.

Calculamos ahora un punto suyo M , para lo cual hacemos $z = 0$ y nos queda $y = 1/3$ y $x = 2/3$, es decir $M(2/3, 1/3, 0)$

La recta r en vectorial sería $(x, y, z) = (2/3 + 5m, 1/3 - 2m, -3m)$ con $m \in \mathfrak{R}$. Sustituimos r en π y obtenemos el valor del parámetro m .

$5(2/3 + 5m) - 2(1/3 - 2m) - 3(-3m) + 2 = 0$. Operando nos queda $38m + 14/3 = 0$, de donde $m = -7/57$, y el punto buscado es $Q(2/3 + 5(-7/57), 1/3 - 2(-7/57), -3(-7/57)) = Q(1/19, 11/19, 7/19)$